

DGLR-L6-Workshop – Airbus, Manching

23. Mai 2023

Robuste Optimierung von Trajektorien und zugehörigen Regelgesetzen unter Unsicherheiten

Tuğba Akman, Felix Schweighofer, Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel

Technische Universität München
TUM School of Engineering and Design
Lehrstuhl für Flugsystemdynamik
Boltzmannstr. 15
85748 Garching bei München
www.fsd.ed.tum.de

E-Mail: tugba.akman@tum.de

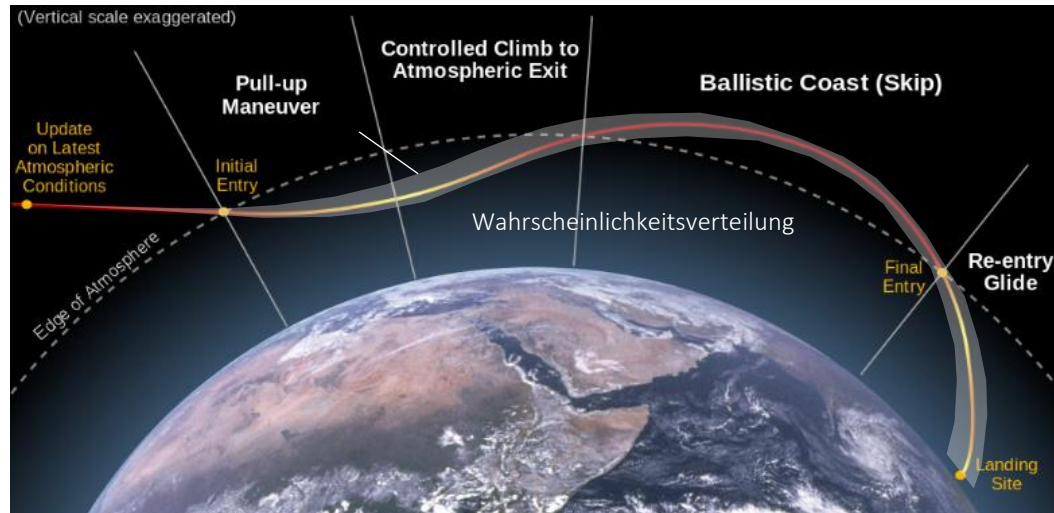
Gefördert durch:



aufgrund eines Beschlusses
des Deutschen Bundestages

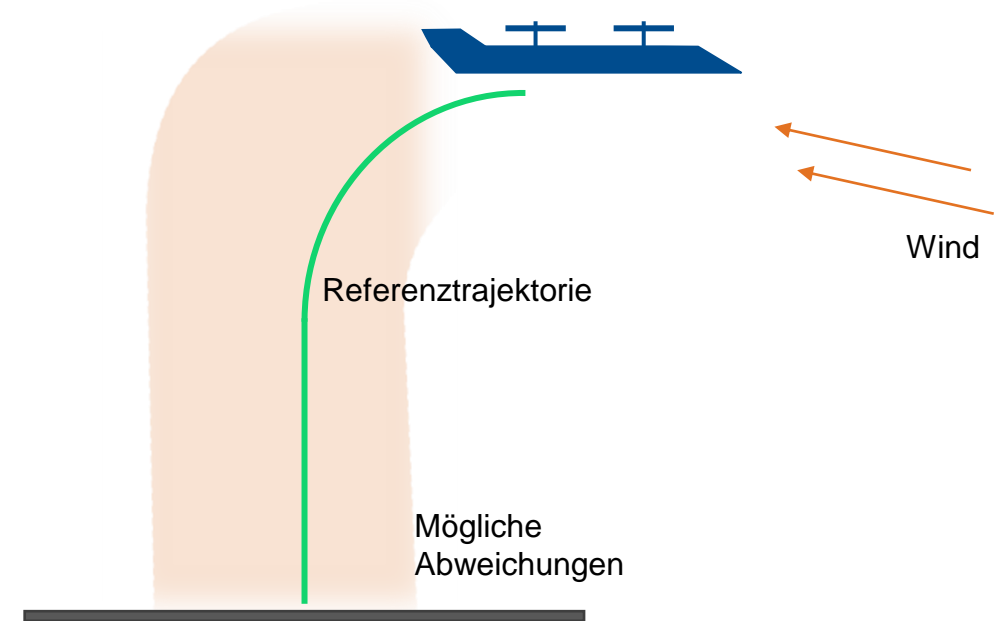
Motivation zur robusten Trajektorienoptimierung

Raumfahrt

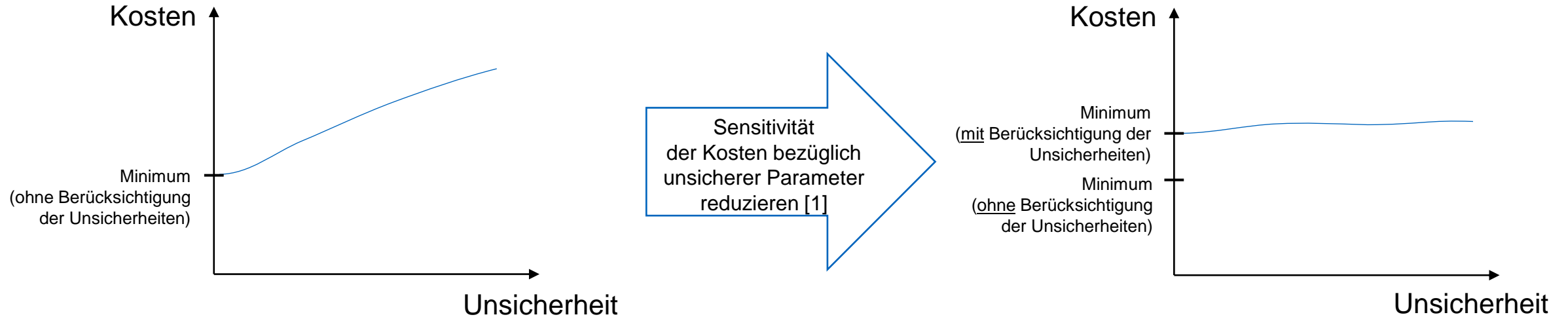


© Clem Tillier, Earth graphic based on NASA image of Earth seen from Apollo 17

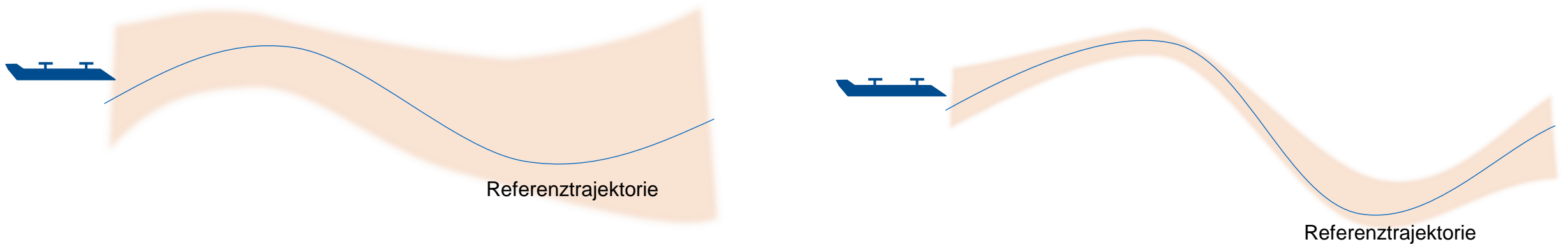
Urban Air Mobility



Idee der robusten Trajektorienoptimierung



Mögliche Abweichungen von der Referenztrajektorie werden reduziert



Optimalsteuerung mit FALCON.m

Optimalsteuerungsproblem:

$$\min_u \left(\int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), p) + w \cdot \int_{t_0}^{t_f} S(t)^2 dt \right)$$

Zeit, Entfernung,
Energiebedarf,
Sensitivität

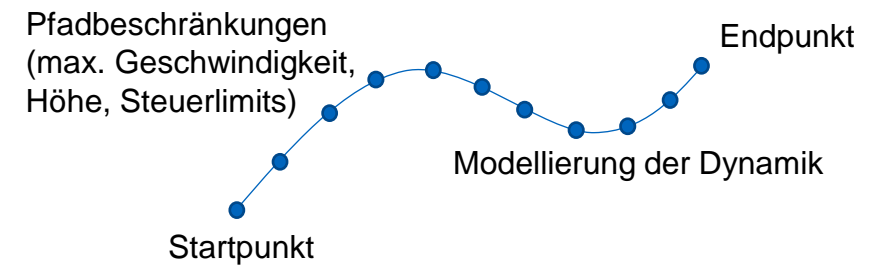
s.t.

$$\dot{x} = f(x, u, p)$$

Punktmasse,
Starrkörper,...

$$c_{bc}(x(t_0), x(t_f)) = 0$$

$$c_{ineq}(x(t), u(t), p) \leq 0$$



Diskretisierung und Simulation

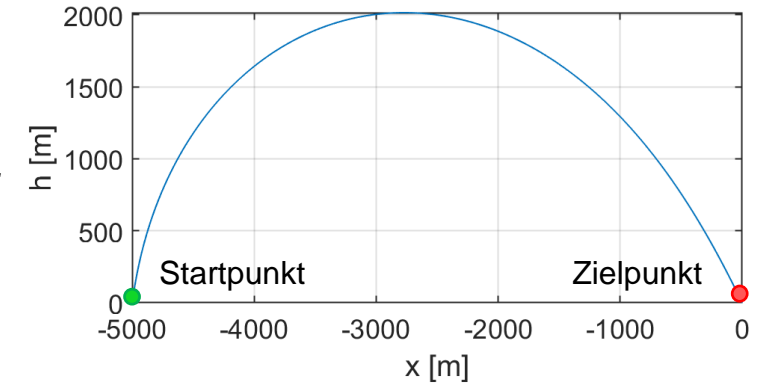


www.falcon-m.com

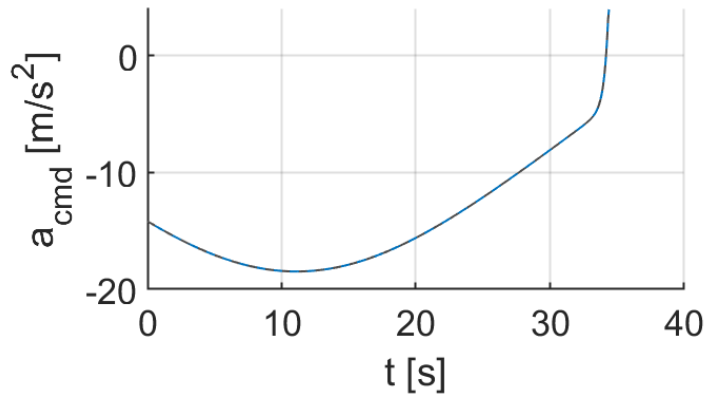
Anwendungsbeispiel: Trajektorien eines Flugkörpers (nominell)

■ Problemformulierung

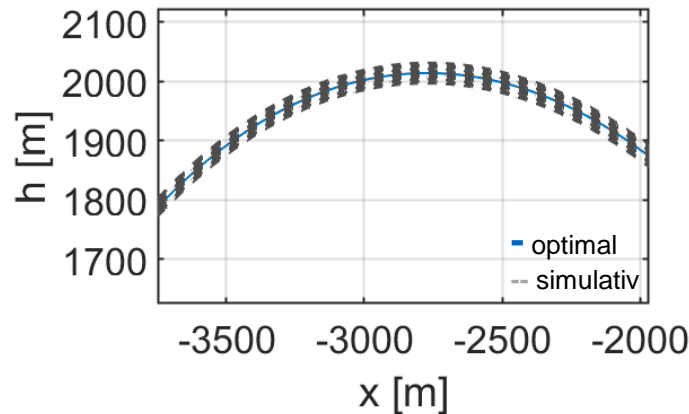
- Steuerung durch Beschleunigungskommando zwischen $[-30, 30]m/s^2$
- Konstante Geschwindigkeit
- Zeitkonstante T_a zum Aufbau der Bahnkrümmung als vereinfachtes Modell für die Rotationsträgheit: 0.3 s
- Minimiere Beschleunigungskommando über den gesamten Flug: $\int_{t_0}^{t_f} a_{cmd}^2(t)dt$
- Angelehnt an Literatur [2]



Steuerung



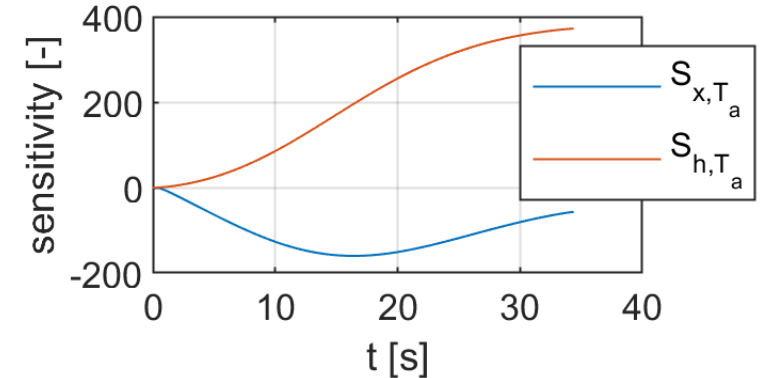
Position - Simulation unter Unsicherheiten
(Variation der Zeitkonstante T_a um 30%)



Sensitivitäten

$$S_{x,T_a}(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial T_a}$$

$$S_{h,T_a}(t) = \frac{\partial h(t)}{\partial T_a}$$



Robuste Optimierung mittels Sensitivitätsstrafterm - Idee

Robustheit im offenen Regelkreis

- Optimalsteuerungsproblem:

$$\min_u \left(\int_{t_0}^{t_f} u(t)^2 dt + w \cdot \int_{t_0}^{t_f} S(t)^2 dt \right)$$

s.t.

$$\dot{x} = f(x, u, p)$$

$$\dot{S} = \left(\frac{df}{dp} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) S + \frac{\partial f}{\partial p}, S(0) = \frac{dx(0)}{dp}$$

$$c_{bc}(x(t_0), x(t_f)) = 0$$

$$c_{pc}(x(t), u(t), p) \leq 0$$

- Unsicherheit hat keinen Einfluss auf Steuerung

Robustheit und Rückkopplung

- Einführung von Pseudoreglertermen zur Stabilisierung der Sensitivitäten:

$$u(\cdot, p) = u(\cdot; 0) + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) (\cdot)}_{R_x(\cdot)} (x(\cdot, p) - x(\cdot; 0)) + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right) (\cdot)}_{R_p(\cdot)} (p - p_0)$$

- Sensitivitätsdifferentialgleichung:

$$\dot{S} = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) R_x \right) S + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) R_p + \frac{\partial f}{\partial p}, S(0) = \frac{dx(0)}{dp}$$

- Optimalsteuerungsproblem:

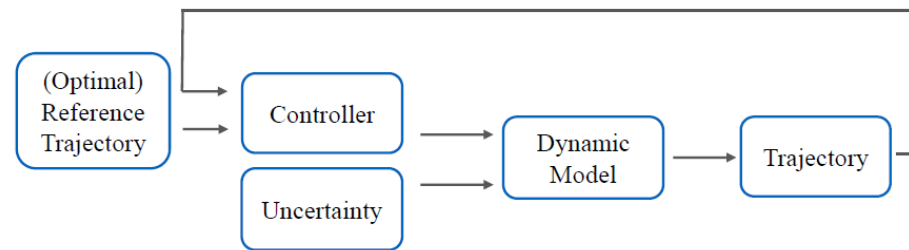
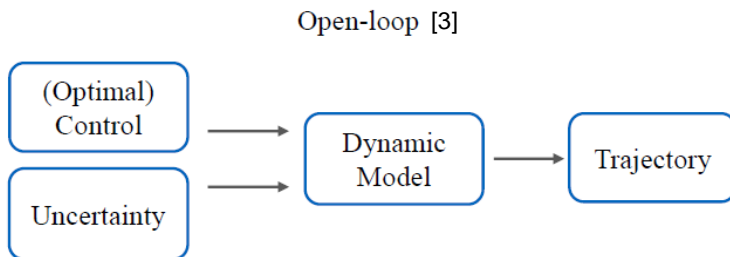
$$\min_u \left(\int_{t_0}^{t_f} u(t)^2 dt + w \cdot \int_{t_0}^{t_f} S(t)^2 dt \right)$$

s.t. ...

$$R_{x_j, lb} \leq \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) (\cdot) \leq R_{x_j, ub}$$

$$R_{p_k, lb} \leq \left(\frac{\partial u}{\partial p_k} \right) (\cdot) \leq R_{p_k, ub}$$

Closed-loop [3]



Stabilisierung

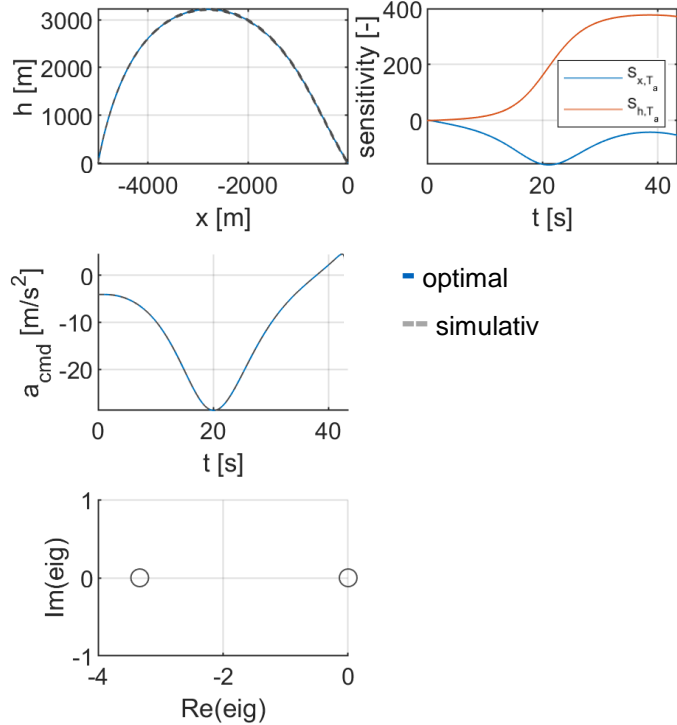
- Stabilität lässt sich aus Eigenwerten ablesen [2]
- Eigenwerte in Optimierung numerisch schwierig zu handhaben (Berechnung, Nichtdifferenzierbarkeit)
- Routh-Hurwitz-Kriterium [4]:

Sei $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ das charakteristische Polynom von A . Die Matrix A ist genau dann stabil, wenn für alle $\lambda = 0, \dots, n$ die Matrix Δ_λ eine positive Determinante hat:

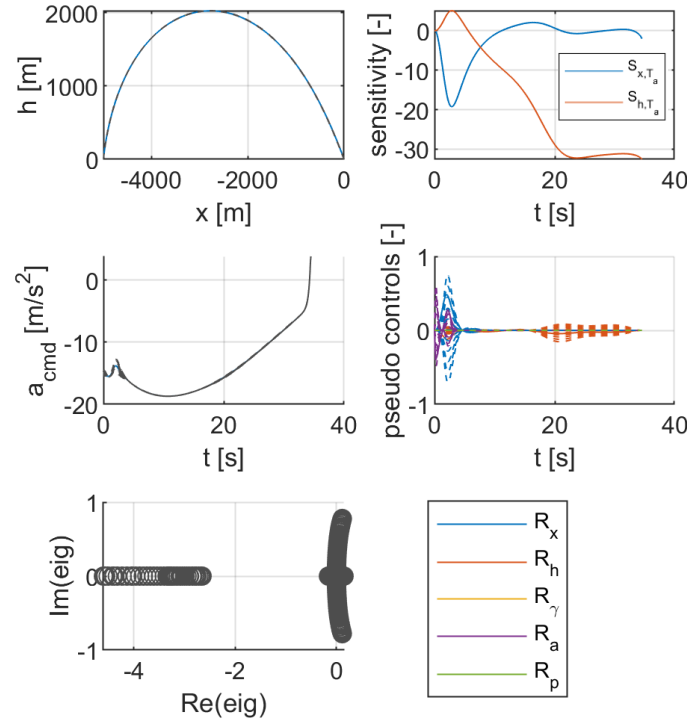
$$\Delta_\lambda = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2\lambda-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2\lambda-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2\lambda-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_\lambda \end{pmatrix}$$

Anwendungsbeispiel: Trajektorien eines Flugkörpers (robust)

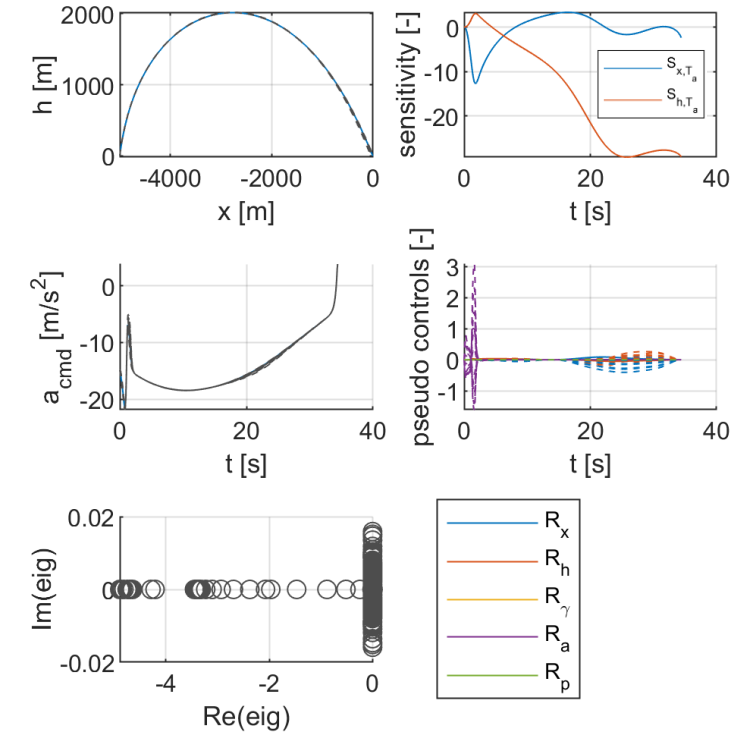
Robust
(ohne Pseudoregelung)



Robust
(mit Pseudoregelung)



Robust
(mit Pseudoregelung und Stabilitätskriterium)



| Kosten | Nominell | Robust | Robust (mit Pseudoregler) | Robust (mit Pseudoregler und RH-Kriterium) |
|--|----------|---------|---------------------------|--|
| Steueraufwand (max. bei Simulation unter Unsicherheit) | 221.18 | 223.17 | 221.54 | 224.96 |
| Sensitivität $\int_{t_0}^{t_f} S_{x,T_a}(t)^2 dt$ | 13062.91 | 7630.44 | 34.47 | 12.30 |

Zusammenfassung und Ausblick

- Trajektorie kann durch Pseudoregelungsansatz signifikant robustifiziert werden (im Vergleich zum Ansatz durch reine Sensitivitätsstrafterme) ohne große Kosten zu verursachen
- Numerischer Aufwand durch Routh-Hurwitz-Kriterium im Gegensatz zu Eigenwertbeschränkungen deutlich reduziert, verbesserte Konvergenz
- Berechnung möglicher Gains für die Auslegung eines Reglers
- Gesamtheitliche Optimalität wird verbessert durch die Betrachtung eines geschlossenen Regelkreises

- Offene Fragen
 - Wann ist das System „stabil genug“?
 - Wie können spezifische (striktere) Anforderungen an Eigenwerte erfüllt werden, ohne sie analytisch zu berechnen?

Literatur

- [1] R. Loxton, K. L. Teo, V. Rehbock. "Robust suboptimal control of nonlinear systems." *Applied Mathematics and Computation* 217.14 (2011): 6566-6576.
- [2] P. Piprek, H. Hong, F. Holzapfel. "Optimal Trajectory Design Accounting for Robust Stability of Path-Following Controller." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 45.8 (2022): 1385-1398.
- [3] T. Akman, F. Schweighofer, R. Afonso, J. Ben-Asher, F. Holzapfel. "Robust eVTOL trajectory optimization under uncertainties – Challenges and approaches." *Journal of Physics: Conference Series* 2514.1 (2023)
- [4] A. Hurwitz. "Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt." *Mathematische Annalen* 46.2 (1895): 273-284.